ستاد امتحانات
دبیرستان پیام غدیر

انتشارات
دبیرستان پیام غدیر

مدیریت آموزش و پرورش منطقه ۱۴
دبیرستان غیر دولتی پسرانه پیام غدیر
پایانی دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۱
پاسخ نامه درس : هندسه ۲

نام دبیر : آقای امام
تاریخ امتحان : ۱۴۰۲/۳/۱۶
رشته تحصیلی: یازدهم ریاضی فیزیک
ساعت شروع امتحان : ۱۰ صبح

صفحه اول

پاسخ سؤال ۱ : متقاطع - مماس - متخارج

پاسخ سؤال ۲ : خطی که همزمان بر دو دایره مماس بوده و در یک طرف آن دو واقع شده باشد.

پاسخ سؤال ۳ : $d = R - R' = 5 - 2 = 3$ ← در دو دایره مماس درونی

پاسخ سؤال ۴ : دوران R به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α، تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A' تصویر نقطه A باشد، داریم: $OA = OA'$ و $\hat{AOA'} = \alpha$

پاسخ سؤال ۵ : معکوس و انقباض

پاسخ سؤال ۶ : الف) تصویر ب) شعاع دایره محیطی آن مثلث ج) زوایای روبرو مکمل یکدیگر باشند
د) محیط، بازتاب محوری، مساحت، مقعر (کاو) هـ) نصف محیط

پاسخ سؤال ۷ :

$$S_{\text{قطاع } OAB} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} = \frac{3.14 \times 8^2 \times 30}{360} \cong 16.75$$

$$S_{\overset{\triangle}{OAB}} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin \hat{O} = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \frac{1}{2} = 16$$

$$\longrightarrow S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\text{مثلث}} = 16.75 - 16 = 0.75$$

پاسخ سؤال ۸ :

الف)
$$\left.\begin{array}{l} \hat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}}{2} = 20 \rightarrow \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD} = 40 \\ \hat{N} = \dfrac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{2} = 50 \rightarrow \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD} = 100 \end{array}\right\} \rightarrow 2\overset{\frown}{AC} = 140 \rightarrow \overset{\frown}{AC} = 70$$

$$\rightarrow 70 + \overset{\frown}{BD} = 100 \rightarrow \overset{\frown}{BD} = 30$$

ب)
$$MT^2 = MA \cdot MB = 9 \times 4 = 36 \rightarrow MT = 6$$

$$AT \perp MT \rightarrow M\hat{T}A = 90^\circ \rightarrow MA^2 = MT^2 + AT^2 \rightarrow 9^2 = 6^2 + AT^2$$

$$\rightarrow AT^2 = 81 - 36 = 45 \rightarrow AT = 3\sqrt{5} \rightarrow OT = R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

پاسخ سؤال ۹ : مرحله اول ← نقطه M را به مرکز دایره (نقطه O) وصل می‌کنیم.
مرحله دوم ← به مرکز وسط OM (مثلاً نقطه N) و شعاع $NO = NM$ دایره‌ای رسم کرد

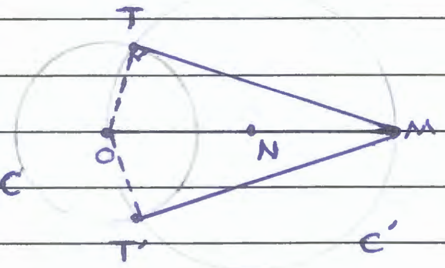
دنباله پاسخ نامه امتحان درس : هندسه ۲   رشته : یازدهم ریاضی فیزیک   تاریخ امتحان : ۱۴۰۲/۳/۱۶

صفحه دوم

و آن را دایره C' می نامیم.

مرحله سوم ← محل تقاطع دایره های C و C' را نقاط T و T' نامیده و از نقطه M به این نقاط وصل می کنیم.

MT و MT' مماس های رسم شده بر دایره هستند.



اثبات مماس بودن MT (و همچنین MT') بر دایره C:

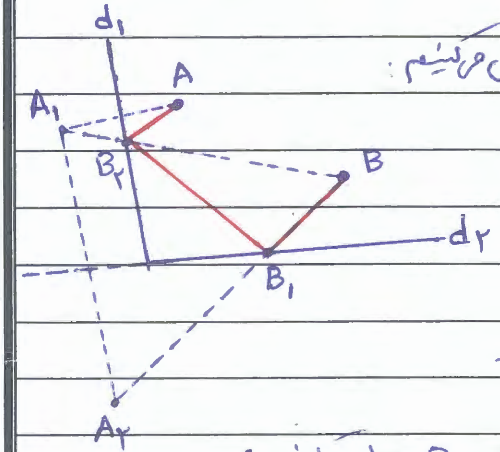
از نقطه T و T' به مرکز دایره C یعنی نقطه O وصل می کنیم

در این صورت در دایره C' دو زاویه محاطی خواهیم داشت به نام های

$\hat{OTM}$ و $\hat{OT'M}$ ← $\hat{OTM} = \frac{\overset{\frown}{OM}}{2} = \frac{180}{2} = 90^\circ$

یعنی شعاع OT بر خط MT عمود است پس باید OT مماس باشد

تا شعاع در محل تماس بر آن عمود باشد (و همچنین OT' به همین شیوه اثبات می گردد)



پاسخ سؤال (۱۰) : برای پیدا کردن کوتاه ترین مسیر به روش زیر عمل می کنیم:

مرحله اول ← قرینه نقطه A را نسبت به خط d_1، نقطه A_1 و قرینه A_1 را نسبت به خط d_2، نقطه A_2 می نامیم.

مرحله دوم ← از نقطه A_2 به نقطه B وصل کرده و نقطه برخورد آن را با خط d_2 نقطه B_1 می نامیم.

مرحله سوم ← از نقطه A_1 به نقطه B_1 وصل کرده و نقطه برخورد آن را با خط d_1 نقطه B_2 می نامیم.

مرحله چهارم ← از نقطه A به B_2 و از نقطه B_2 به B_1 و از نقطه B_1 به B وصل می کنیم.

مسیر AB_2B_1B کوتاه ترین مسیر ممکن است.

پاسخ سؤال (۱۱) : دایره کوچکتر را C' می نامیم در این دایره قطر MB بر وتر NN' طبق فرض سؤال عمود است پس آن را نصف می کند یعنی:

$NO = N'O = OD - ND = R - 10$

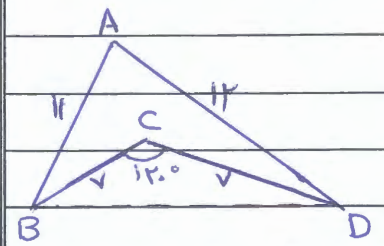
و همچنین می دانیم $OB = R$ و $OM = AO - AM = R - 16$ بنابراین طبق روابط طولی وترهای متقاطع در دایره C' می توان نوشت:

$NO \cdot N'O = MO \cdot BO$

$(R-10)(R-10) = (R-16)R \rightarrow R^2 - 20R + 100 = R^2 - 16R \rightarrow 4R = 100$

$\rightarrow \boxed{R = 25}$

حال اگر شعاع دایره C' را R' بنامیم داریم: $R' = \frac{MB}{2} = \frac{OB + MO}{2} = \frac{25 + (25-16)}{2} = \boxed{17}$



پاسخ سؤال (۱۲) : نقاط B و D را به یکدیگر وصل می کنیم و در مثلث BCD

با استفاده از قضیه کسینوس ها داریم: $BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC \cdot DC \cos\hat{C}$

$BD^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \times 7 \times 7 \times \underbrace{\cos 120}_{= -\frac{1}{2}} \rightarrow BD^2 = 3 \times 7^2 \rightarrow BD = 7\sqrt{3}$

حال در مثلث ABD و طبق قضیه کسینوس ها داریم: $\cos\hat{A} = \frac{11^2 + 13^2 - (7\sqrt{3})^2}{2 \times 11 \times 13} = \frac{143}{286} = \frac{1}{2} \rightarrow \hat{A} = 60^\circ$

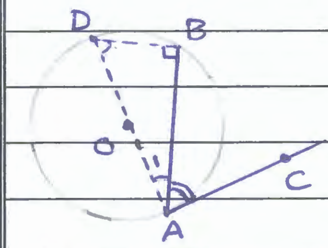
ادامه در صفحه بعد

صفحه سوم

ادامه پاسخ سؤال ⑫: برای محاسبه مساحت چهارضلعی ABCD از تفاضل مساحت‌های دو مثلث استفاده می‌کنیم:

$$S_{ABCD} = S_{\overset{\triangle}{ABD}} - S_{\overset{\triangle}{CBD}} = \frac{1}{2} \times 11 \times 13 \times \cos 60^\circ - \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \times \cos 120^\circ = \frac{94\sqrt{3}}{4}$$

پاسخ سؤال ⑬: زاویه ظلی BAC را در نظر می‌گیریم، برای اثبات قضیه از نقطه A رأس زاویه به مرکز دایره وصل کرده امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند سپس از نقطه D به نقطه B وصل کرده خواهیم داشت:



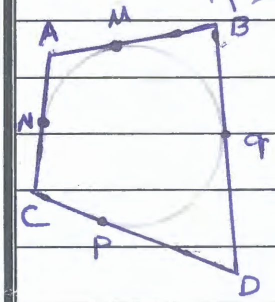
$$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{DA}}{2} = \frac{180}{2} = 90^\circ \longrightarrow \hat{D} + \hat{A}_1 = 90^\circ$$

از طرفی شعاع OA بر مماس AC عمود است $\longrightarrow \hat{A} + \hat{A}_1 = 90^\circ$

$$\longrightarrow \hat{D} + \cancel{\hat{A}_1} = \hat{A} + \cancel{\hat{A}_1} \longrightarrow \hat{D} = \hat{A} \quad ①$$

همچنین زاویه محاطی D برابر نصف کمان روبروست $\longrightarrow \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \xrightarrow{①} \boxed{\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}}$

پاسخ سؤال ⑭: با توجه به دو شرطی بودن قضیه، ابتدا رفت قضیه را اثبات می‌کنیم:



فرض {ABCD: چهارضلعی محیطی   حکم {AB + CD = AC + BD

می‌دانیم مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر یک دایره با هم برابرند:

$AM = AN$

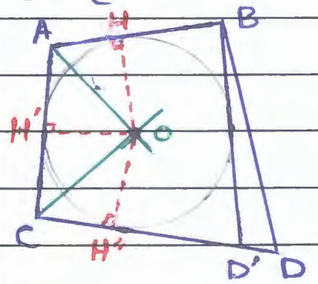
$CP = CN$

$Dp = Dq$

$BM = Bq$

$$\underline{AM + BM} + \underline{CP + DP} = \underline{AN + CN} + \underline{Dq + Bq} \longrightarrow AB + CD = AC + BD$$

و اکنون به اثبات برگشت قضیه می‌پردازیم یعنی داریم: فرض {AB + CD = AC + BD و حکم {ABCD محیطی



در چهارضلعی ABCD دایره‌ای را بر سه ضلع آن به روش زیر مماس می‌کنیم، نیمساز دو زاویه دلخواه آن مثلاً A و C را رسم می‌کنیم، این دو نیمساز همدیگر را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کنند و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} \text{ روی نیمساز } O \longrightarrow OH = OH' \\ \hat{C} \text{ روی نیمساز } O \longrightarrow OH' = OH'' \end{array}\right\} \longrightarrow OH = OH' = OH'' = R$$

پس به مرکز O و شعاع R دایره‌ای رسم می‌کنیم، این دایره بر سه ضلع AB و AC و CD مماس خواهد بود، اگر بر ضلع BD هم مماس باشد که قضیه اثبات شده است، اما فرض می‌کنیم مماس نباشد (برهان خلف) آنگاه از رأس B مماسی بر دایره رسم می‌کنیم تا ضلع CD یا امتداد آن را در نقطه‌ای مانند D′ قطع کند، آنگاه خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} \text{طبق فرض برگشت} \longrightarrow AB + CD = AC + BD \longrightarrow AB - AC = BD - CD \\ \text{طبق برهان خلف و محیطی بودن چهارضلعی } BACD' \longrightarrow AB + CD' = AC + BD' \longrightarrow AB - AC = BD' - CD' \end{array}\right\} \longrightarrow BD - CD = BD' - CD'$$

$$\longrightarrow BD = BD' + (CD - CD')$$

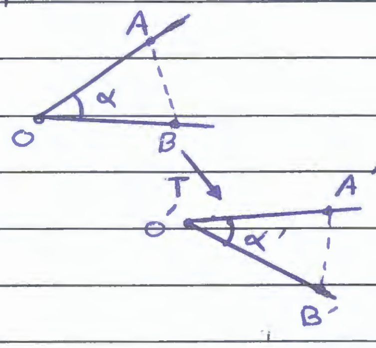
$$BD = BD' + DD'$$

وچون BD، BD′، DD′ اضلاع یک مثلث $(\overset{\triangle}{BDD'})$ هستند این تساوی امکان ندارد (طبق قضیه حمار) و این بدان معناست که نقطه D′ همان نقطه D است یعنی دایره بر ضلع BD نیز مماس است پس چهارضلعی BACD محیطی است.

صفحه چهارم

پاسخ سوال ۱۵:

زاویه OAB را در نظر گرفته و تبدیل یافته آن را تحت تبدیل طولپای T زاویه O'A'B' می‌نامیم بنابراین خواهیم داشت:

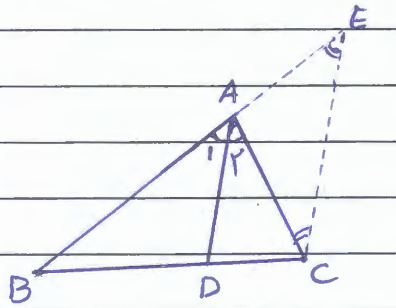


$$\left.\begin{array}{l} T(O)=O' \\ T(A)=A' \\ T(B)=B' \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} T(OA)=O'A' \\ T(OB)=O'B' \\ T(AB)=A'B' \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{طولپا}]{\text{T تبدیل}} \left.\begin{array}{l} OA=O'A' \\ OB=O'B' \\ AB=A'B' \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{ض ض ض}} OAB \cong O'A'B' \longrightarrow \hat{\alpha} = \hat{\alpha}'$$

پاسخ سوال ۱۶:

حکم $\left\{\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CD}\right.$ فرض $\left\{\hat{A}_1 = \hat{A}_2\right.$



ابتدا از رأس C خطی به موازات نیمساز زاویه A رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BA را در نقطه‌ای مانند E قطع کند، آنگاه خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} AD \parallel CE \\ BE \text{ مورب} \end{array}\right\} \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E}$$

$$\left.\begin{array}{l} AD \parallel CE \\ AC \text{ مورب} \end{array}\right\} \rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}$$

$$\rightarrow \hat{E} = \hat{C} \rightarrow AE = AC \quad (1)$$

از طرفی طبق قضیه تالس داریم: در مثلث BEC و با توجه به $AD \parallel EC$ $\rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{DC}$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$